

Olimpiada de matematică

Bistrita- Etapa județeană- 12.03.2011

Clasa a V-a

Problema 1

$$\left. \begin{array}{l} \overline{abc} = 100a + 10b + c \\ \overline{bca} = 100b + 10c + a \\ \overline{cab} = 100c + 10a + b \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 111a + 111b + 111c + 21a - b - 78c \\ x = 132a + 110b + 33c \\ x = 11(12a + 10b + 3c) \end{array} \right\} \dots\dots\dots 2p$$

$x:1; x:x; x:11 \Rightarrow x$ nu este prim.....1p

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dacă } n=0 \Rightarrow a=2014 \\ a:2 \text{ și } a \nmid 2^2 = 4 \Rightarrow a \neq p.p. \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dacă } n=2k, k > 0 \\ u(2005^n) = 5; u(2010^n) = 0; u(2012^{2n+1}) = 2 \\ u(a) = 7 \Rightarrow a \neq p.p. \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dacă } n=2k+1, k \geq 0 \\ u(a) = u(5+0+8) = 3 \Rightarrow a \neq p.p. \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2

$$x^2 \neq 5 \Rightarrow x^2 = x \text{ sau } x^2 = y \text{ sau } x=9 \dots\dots\dots 2p$$

I. Dacă $x^2 = x \Rightarrow t=5$ și $y=9$.

$$\text{Deci } x=1, t=5, y=9 \dots\dots\dots 1p$$

II. Dacă $x^2 = y \Rightarrow t=5$ și $y=9$1p

Deci $x=3, t=5, y=9$, dar atunci $\frac{3}{5}x, y, \frac{3}{5}x^2, t$ ar trebui să fie echivalent cu $\frac{3}{5}3, 9, \frac{3}{5}9, 5$ care este fals1p

III. Dacă $x=9 \Rightarrow x^2=81, t=5, y=81$1p

$$\text{Deci } x=9, y=81, t=5 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3

$$189 = 144 + 36 + 9 = 12^2 + 6^2 + 3^2 \dots\dots\dots 1p$$

I. Dacă $n=2k+1$ atunci:

$$189^n = 189^{2k+1} = 189^{2k} \cdot 189 = 189^{2k} \cdot (144 + 36 + 9) =$$

$$\begin{aligned} &= 189^{2k} \cdot 144 + 189^{2k} \cdot 36 + 189^{2k} \cdot 9 \\ &= (189^k \cdot 12)^2 + (189^k \cdot 6)^2 + (189^k \cdot 3)^2 \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 189^2 &= (3^3 \cdot 7)^2 = 3^6 \cdot 7^2 = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = \\ &= 81 \cdot (3 \cdot 7)^2 = (64 + 16 + 1) \cdot 21^2 = \\ &= (8 \cdot 21)^2 + (4 \cdot 21)^2 + 21^2 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

II. Dacă $n=2k$ atunci:

$$189^n = 189^{2k} = 189^{2k-2} \cdot 189^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$189^n = (189^{k-1} \cdot 8 \cdot 21)^2 + (189^{k-1} \cdot 4 \cdot 21)^2 + (189^{k-1} \cdot 21)^2 \dots\dots\dots 2p$$